

FUNCIONES**TEMA 1: FUNCIONES**

Idea intuitiva de función. Dominios.

RECUERDA: Dominio de una función, f , es el conjunto de los valores reales que puede tomar la variable independiente, x , para que exista la función. (Para que la variable dependiente, y , tome un valor real).

Para calcular el dominio de una función, debes saber que operaciones no están definidas:

- la división por cero
- las raíces cuadradas de números negativos
- el logaritmo de cero y los logaritmos de números negativos

1.- Indica si las siguientes funciones son polinómicas, racionales, irracionales, logarítmicas o exponenciales y determina su Dominio:

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^2 + 3x - 32$ d) $f(x) = x^5 - 3x$

e) $f(x) = \frac{1}{x}$ f) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-5}$ g) $f(x) = \frac{2x-5}{5x^2-3x}$ h) $f(x) = \frac{x}{6x^3+x^2-2x}$

i) $f(x) = \sqrt{2x+7}$ j) $f(x) = \sqrt{5-x}$ k) $f(x) = \sqrt{\frac{x+7}{4-x}}$ l) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{-x}}$

m) $f(x) = \log x$ n) $f(x) = 2^x$ o) $f(x) = e^x$ p) $f(x) = \sqrt{-x^2+36}$

2.- Dadas las siguientes funciones, efectúa las siguientes operaciones:

$f+g$, f/g , $f \circ g$ y $g \circ f$ e indica su dominio:

a) $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x-8$

c) $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = x + 2$

TEMA 2 LIMITE DE UNA FUNCIÓN

Idea intuitiva. Definición de límite de una función, f , en un punto, x_0 . Propiedades de los límites. Cálculo de límites de funciones polinómicas, racionales e irracionales. asíntotas horizontales y verticales.

Recuerda:

Definición: Una función, $f(x)$, tiene por límite L en el punto x_0 , cuando para toda sucesión de valores de x que tenga por límite x_0 , la sucesión de los valores correspondientes de $f(x)$ tiene por límite L . NOTACIÓN: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

1.- Basándote en la definición de límite, construye una sucesión de valores de x , que verifique los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3 & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 3 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2 + 2) = -\infty \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{-x} = -3 & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+20}{-x^2} = -1 & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3}{x+1} = +\infty \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3}{x+1} = -\infty & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2+7}{x^3} = 0 \end{array}$$

2.- Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 + 2x^2 - 7) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x + 3)^2 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x)^3 \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} (-4x^2 + 30x + 1) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} (-x + 1)^3 & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \infty} (-5x^3 - x)^3 \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 7x + 1) & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - x)^4 & \text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} 7 \end{array}$$

3.- Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+5}{x-1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+6x+9}{x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7}{x-2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+5x-6}{x-1} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x-3} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+6x^2+12x+8} \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)^2-9}{x-1} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4-1}{x^6-1} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+4x+4}{6x^2+12x-8} \\ \text{m) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+5)^3}{x-1} & \text{n) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+6x+9}{(5x-3)^2} & \text{ñ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^7+1}{x^3-2} & \text{o) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+4}{x^2} \end{array}$$

4.-Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \quad b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3-3x} - 3}{x + 2} \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{2x^2 + x + 1}}{x - 3x + 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5}}{\sqrt{2x} - 2} \quad e) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3} - 4x \quad f) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{5x}$$

5.- Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^3 + 2)^2}{2x^3} \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x - 1} \quad c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x+7} - 3x) \quad e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2} \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{3 - \sqrt{x+9}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x)^3 \quad h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}{x - 2} \quad i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^2}{(3x+5)^2}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 4} \quad k) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{2x^2 - 18} \quad l) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x})$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3x+1}} \quad n) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{2x+3}}{x^2 - 8x + 15} \quad o) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

6.- Determina las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones y estudia el acercamiento de la función a las mismas:

$$a) f(x) = \frac{6}{x-1} \quad b) f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} \quad c) f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-6x+9} \quad e) f(x) = \frac{7}{2x^2-8} \quad f) f(x) = \frac{4x+3}{6x-12}$$

7) Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{3n} \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{2x} \quad d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{2x} \quad e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{\frac{2n+1}{n}} \quad g) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x}\right)^{2x} \quad h) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n+2}{5n}\right)^{\frac{2n^2-5n+1}{3n^2-7}} \quad i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{n}\right)^{2n}$$

TEMA 3 : CONTINUIDAD

Idea intuitiva de continuidad. Definición de continuidad de una función en un punto. Estudio de la continuidad en funciones elementales y en funciones definidas a trozos. Tipos de discontinuidad.

RECUERDA:

Definición: Una función, f , es continua en un punto, x_0 , perteneciente al dominio de la función, si el límite de la función en el punto, x_0 , existe y es igual al valor de la función en dicho punto. Es decir:

$$f \text{ es continua en un punto } x_0 \in D \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Tipos de Discontinuidad en un punto:

Discontinuidad evitable : si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \neq f(x_0)$; $L \in \mathbb{R}$
 L : verdadero valor de la función en el punto x_0 .

Discontinuidad inevitable: si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

inevitable de salto finito: si la diferencia entre los límites laterales es un número real.

inevitable de salto infinito: si la diferencia entre los límites laterales es infinito

1.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones, indicando los tipos de discontinuidad, si los hay:

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ x+5 & \text{si } x = 0 \\ 1-x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 3 \\ x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -3 \\ 1 - 2x & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} -7 - 5x & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 1 & \text{si } -3 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 3 \\ 3x - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2.- Determina los valores de a y b para que las siguientes funciones sean continuas en los puntos indicados:

$$a) f(x) = \begin{cases} ax+2 & \text{si } x < 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \\ b-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si } x < -2 \\ bx+5 & \text{si } x = -2 \\ 1-x & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

TEMA 4 : CÁLCULO DE DERIVADAS

CALCULA LAS DERIVADAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

- 1) $y = (x^3 + 1) \cdot (x^3 - 1)$ 2) $y = x^4 \cdot e^x$ 3) $y = x \cdot \ln x$
 4) $y = e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x$ 5) $y = \operatorname{sen} 2x \cdot \cos x$ 6) $y = \frac{1}{x-1}$
 7) $y = \frac{-2x}{x+1}$ 8) $y = \frac{3}{x^2-1}$ 9) $y = \frac{x^2-3}{x^2+3}$
 10) $y = \frac{\ln x}{x}$ 11) $y = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 12) $y = \ln(2x+1)$
 13) $y = \ln \sqrt{1-x}$ 14) $y = e^{4x}$ 15) $y = 2^x$
 16) $y = 2^{\cos x}$ 17) $y = \operatorname{sen}^2 x$ 18) $y = \sqrt{\cos x}$
 19) $y = 5 \operatorname{sen}^3(3x^2+1)$ 20) $y = 7e^{x^2+3x}$ 21) $y = \sqrt{3^{x^2+1}}$
 22) $y = (2x+1)^3$ 23) $y = x^2 \ln x$ 24) $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
 25) $y = \operatorname{sen}^5 x$ 26) $y = e^x \operatorname{sen}^2 x$ 27) $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$
 28) $y = \ln(\cos 2x)$ 29) $y = \frac{1}{\cos x}$ 30) $y = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
 31) $y = 4x^2 - 7x + 1$ 32) $y = 4 + e^x$ 33) $y = (3x-2) \cdot (2x+3)$
 34) $y = 7x^3 - 2x^2 + 5 - Lx$ 35) $y = 6x + e^x + 2$ 36) $y = \sqrt{x}$
 37) $y = 2x \cdot Lx$ 38) $y = \sqrt[3]{x^2}$ 39) $y = \frac{1}{x^3}$
 40) $y = \frac{1}{x^2}$ 41) $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ 42) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$
 43) $y = \sqrt{x^3}$ 44) $y = 3\sqrt{x^3} - 2x$ 45) $y = x\sqrt{x}$
 46) $y = \pi\sqrt{x} - 2x$ 47) $y = xLx + x^2e^x$ 48) $y = 3x - 5Lx$ 49) $y = \frac{2x}{Lx}$
 50) $y = x \operatorname{arcsen} x - 2 \operatorname{tg} x$ 51) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$ 52) $y = x^2 \operatorname{sen} x - 2x \cos x$
 53) $y = \sqrt{x^3 \sqrt{x^2}}$ 54) $y = \frac{4}{x} - 3x^{-2} + 2x \operatorname{tg} x$ 55) $y = \frac{8x+3}{3x^2-5}$

FUNCIONES COMPUESTAS

- 56) $y = \operatorname{sen} 3x$ 57) $y = 4 \cos 5x$ 58) $y = \operatorname{sen} 2x^2$ 59) $y = \operatorname{tg} x^3$
 60) $y = \operatorname{tg}^3 x$ 61) $y = \sqrt[3]{2x^2-3}$ 62) $y = 6 \operatorname{sen}^2(2x+1)$ 63) $y = \operatorname{sen}^4(5x-2)$
 64) $y = \sqrt{2x^2+7}$ 65) $y = L(2x+3)$ 66) $y = \cos^3 5x$ 67) $y = \cos^3 L(2x+3)$
 68) $y = Le^x$ 69) $y = \cos(\operatorname{sen}(2x))$ 70) $y = \sqrt{\operatorname{sen} 3x + (2x+1)^3}$ 71) $y = (4x^2 - 5x + 1)^3$