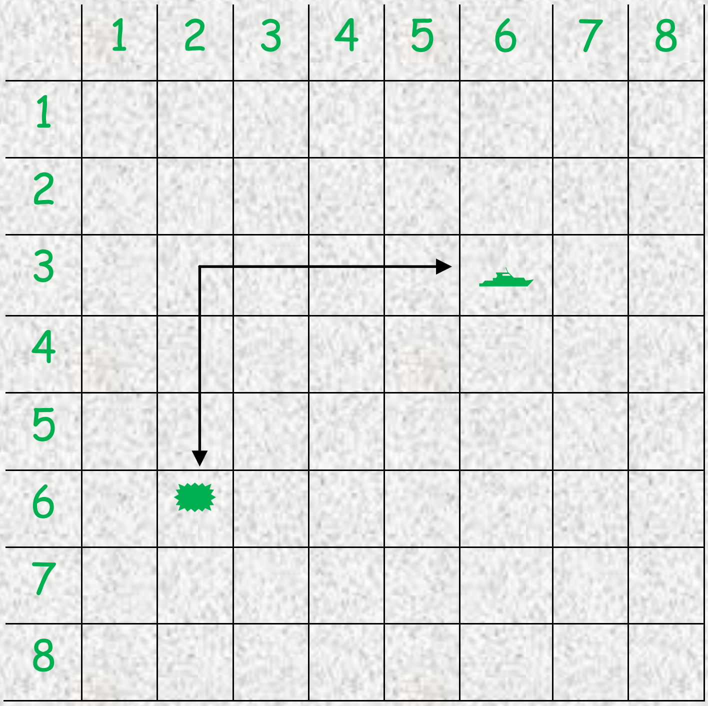
PARA LOS MÁS ATREVIDOS

01.- Siendo a_1, a_2, ..., a_n una progresión aritmética de diferencia ***d***, calcular la suma:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}\;+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\;\;............+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$

02.- En un casillero 8x8 tu compañero sitúa un submarino ( ) sin que tú lo veas. Vas lanzando cargas de profundidad, diciendo las coordenadas de la zona de disparo. Después de cada lanzada, el compañero te contesta con la distancia, medida en casillas horizontales y verticales, a la que s encuentra el submarino. Si la distancia es cero, contesta HUNDIDO. Por ejemplo si el submarino está en posición (3,6), y tú disparas a la zona (6,2), tu compañero dirá: distancia 7. Se pide describir una estrategia o reglas para efectuar los disparos que permita hundir el submarino con tres de ellos como máximo.



03.- Los números $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$ son términos de una progresión aritmética. Demostrar que b^2, a^2, c^2 son también términos consecutivos de una progresión aritmética.

04.- La circunferencia inscrita en un triángulo ABC es tangente al lado AB en el punto D. Demostrar que:

$$\overline{BD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{CA}\right)$$

05.- Calcular:

$$log\,tag\,1^o + log\,tag\,2^o + log\,tag\,3^o + ... + log\,tag\,87^o + log\,tag\,88^o + log\,tag\,89^o$$

06.- Simplificar la expresión: $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$ en la que $1 < x < 2$.

07.- Calcular el valor de $log_{ab}\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$ sabiendo que $log_{ab}\,a = 4$.

08.- ¿A qué intervalo ha de pertenecer la razón de una progresión geométrica para que tres términos consecutivos de dicha progresión sean las longitudes de los lados de un triángulo?

09.- Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación:

$$2x^{99} + 3x^{98} + 2x^{97} + 3x^{96} + ... + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$$

10.- Hallar el mayor número natural *n*, para el que la expresión $(n+1)\cdot(n^4+2n)+3\cdot(n^3+57)$ es divisible por n^2+2

11.- ¿Para qué valores de *a*, las raíces de la ecuación $x^2-4x-log_2 a=0$ son reales?

12.- Dados los enteros impares *a* y *b*, probar que el número a^3-b^3 es divisible por 2^n $\Leftrightarrow$ $a-b$ es divisible por 2^n.

13.- Sean:

$X=1990\cdot(1+2+3+...+1991)$ e $Y=1991\cdot(1+2+3+...+1990)$.

Razonar cuál de los dos números X o Y es mayor.

14.- Hallar razonadamente todos los conjuntos de tres elementos *a*, *b*, *c* no necesariamente distintos y que cumplan las condiciones siguientes:

1) Los elementos *a*, *b* y *c* son dígitos y números primos.

2) Todos los números de dos cifras, colocadas en cualquier orden, que pueden formarse con *a*, *b* y *c* son números primos.

3) Todos los números de tres cifras, colocadas en cualquier orden, que pueden formarse con *a*, *b* y *c* son números primos.

Nota: el número 1 se considera primo.

15.- Tres números reales, distintos de cero, están en progresión aritmética y los cuadrados de esos números, en el mismo orden, están en progresión geométrica. Hallar todas las razones posibles de esta última progresión.

16.- Resolver el sistema:
$$\begin{cases} x^3+y^3+2x^2y+2xy^2=21'489 \\ x^2+y^2+xy=7'41 \end{cases}$$

17.- Probar que dados cinco números naturales, siempre es posible elegir tres de ellos cuya suma es múltiplo de tres.

18.- Decir, razonadamente, con qué exponente figurará el factor 2 en la descomposición en factores primos de 63!

SOLUCIONES

01.-

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ \cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=$$

$$\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+\ \ldots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}=$$

$$\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}+\ \ldots+\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_{n-2}}+\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}=$$

$$\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}$$

02.-

Se lanza a la posición (1,1). Al contestar el compañero con la distancia correspondiente queda determinada una diagonal de posibles soluciones. Se lanza a la posición (8,1). Al contestar el compañero con otra distancia queda determinada otra diagonal perpendicular a la anterior. Lógicamente el submarino estará situado en el corte de las dos diagonales, con lo cual ya sabemos dónde tenemos que disparar.

03.-

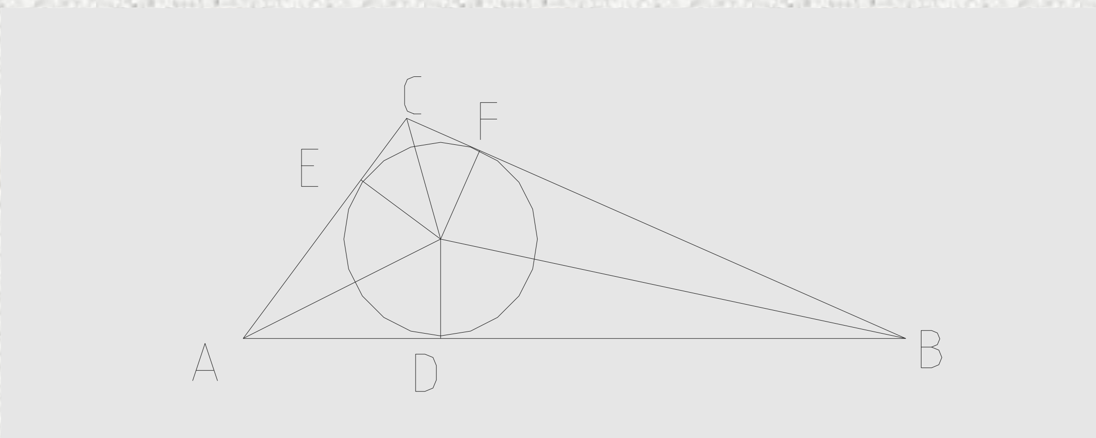
$$\frac{1}{a+b},\ \frac{1}{b+c},\ \frac{1}{c+a}\quad p.a. \Leftrightarrow \frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b}=\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c} \Leftrightarrow \frac{2}{b+c}=\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{b+c}=\frac{2a+b+c}{(c+a)(a+b)} \Leftrightarrow 2(c+a)(a+b) = (b+c)(2a+b+c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ca+2cb+2a^2+2ab = 2ab+2ac+b^2+bc+cb+c^2 \Leftrightarrow a^2-b^2 = c^2-a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2,\ a^2,\ c^2 \quad p.a.$$

04.-



$$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DB}=\overline{AE}+\overline{DB}=\overline{AC}-\overline{EC}+\overline{DB}=\overline{AC}-\overline{CF}+\overline{DB}=$$

$$=\overline{AC}-\left(\overline{BC}-\overline{FB}\right)+\overline{DB}=\overline{AC}-\overline{BC}+\overline{DB}+\overline{DB}=$$

$$=\overline{AC}-\overline{CB}+2\overline{DB}$$

Por lo tanto $\overline{AB}=\overline{AC}-\overline{CB}+2\overline{DB}$, de donde se deduce que $\overline{DB}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{CB}-\overline{CA}\right)$ c.q.d.

05.-

Teniendo en cuenta que la tangente de un ángulo es igual a la cotangente de su complementario (es decir, $tag\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cot\,ag\,\alpha$), la igualdad anterior se puede escribir de la forma:

$$log\,tag\,1^o + log\,tag\,2^o + log\,tag\,3^o + ... + log\,\frac{1}{tag\,3^o} + log\,\frac{1}{tag\,2^o} + log\,\frac{1}{tag\,1^o} =$$

$$= log\left(tag\,1^o \cdot tag\,2^o \cdot tag\,3^o \cdots\cdots \frac{1}{tag\,3^o}\cdot\frac{1}{tag\,2^o}\cdot\frac{1}{tag\,1^o}\right) = log\,tag\,45^o = log\,1 = 0$$

06.-

Consideramos $A = \frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$, como A es positivo, podemos elevar al cuadrado, simplificar y, posteriormente, extraer la raíz cuadrada positiva del resultado.

$$A^2=\frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}+\frac{1}{x-\sqrt{x-1}}+2\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\cdot\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}} =$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x-1}+x+2\sqrt{x-1}}{x^2-4(x-1)}+\frac{2}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}=\frac{2x}{(x-2)^2}+\frac{2}{\sqrt{(x-2)^2}} =$$

Como x < 2 la raíz cuadrada positiva de $(x-2)^2$ es $(2-x)$, con lo que:

$$A^2=\frac{2x}{(x-2)^2}+\frac{2}{2-x}=\frac{2x+2(2-x)}{(2-x)^2}=\frac{4}{(2-x)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{\frac{4}{(2-x)^2}}=\frac{2}{2-x}$$

OTRA FORMA

Teniendo en cuenta que:

$$x+2\sqrt{x-1}=\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2 \quad y \quad x-2\sqrt{x-1}=\left(1-\sqrt{x-1}\right)^2$$

podemos escribir:

$$A=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{\left(1-\sqrt{x-1}\right)^2}}=\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}+\frac{1}{1-\sqrt{x-1}}=$$

$$=\frac{1-\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}}{1-(x-1)}=\frac{2}{2-x}$$

07.-

$$log_{ab}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}=\frac{1}{3}log_{ab}\,a-\frac{1}{2}log_{ab}\,b==\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\left(log_{ab}\,ab-log_{ab}\,a\right)=$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}(1-4)=\frac{17}{6}$$

08.-

Sean $a, ar \; y \; ar^2$ los términos de la progresión (evidentemente $a > 0$ y $r > 0$). Distinguiremos dos casos: $r \geq 1 \;\; y \;\; 0 < r < 1$

a) $r \geq 1 \quad \Rightarrow a \leq ar \leq ar^2$. Teniendo en cuenta que en un triángulo, un lado es siempre menor que la suma de los otros dos, podemos escribir: $ar^2 < a + ar \Rightarrow ar^2 - ar - a < 0 \Rightarrow r^2 - r - 1 < 0$ y, resolviendo la inecuación: $r \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$, pero como estamos en el caso $r \geq 1$, el intervalo válido es $\left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$

b) $0 < r < 1 \;\; \Rightarrow \; a > ar > ar^2 \;\; \Rightarrow$

$$\Rightarrow \; a < ar + ar^2 \Rightarrow ar^2 + ar - a > 0 \Rightarrow r^2 + r - 1 > 0.$$

Resolviendo la inecuación: $r \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty \right)$, pero como estamos en el caso $0 < r < 1$, el intervalo válido es $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right)$

Por lo tanto, la solución es $r \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$

09.-

$$2x^{99}+3x^{98}+2x^{97}+3x^{96}+...+2x^{3}+3x^{2}+2x+3=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x+3)x^{98}+(2x+3)x^{96}+...+(2x+3)x^{2}+(2x+3)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x+3)\cdot\left(x^{98}+x^{96}+x^{94}+...+x^{2}+1\right)=0$$

Como el segundo factor nunca se anula, la única solución de la ecuación es: $x=-\frac{3}{2}$

10.-

Operando y efectuando la división, resulta: $\frac{n^5+n^4+3n^3+2n^2+2n+171}{n^2+2}=n^3+n^2+n+\frac{171}{n^2+2}$, de donde está claro que *n* = 13

11.-

Que las raíces de la sean reales significa que el discriminante de la ecuación debe ser mayor o igual que cero, es decir: $16+4log_2 a\geq 0\Rightarrow log_2 a\geq -4\Rightarrow a\geq 2^{-4}=\frac{1}{16}$

12.-

Basta tener en cuenta que: $a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$

$\Leftarrow$) Si 2^n divide a $a-b$, está claro que 2^n divide a a^3-b^3

$\Rightarrow$) Si 2^n divide a a^3-b^3 $\Rightarrow$ 2^n divide al producto $(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$, pero como $\left(a^2+ab+b^2\right)$ es impar (por ser suma de tres impares), 2^n no puede dividir a $\left(a^2+ab+b^2\right)$ $\Rightarrow$ 2^n divide a $a-b$

13.-

$$X=1990\cdot\frac{1+1991}{2}\cdot 1991=\frac{1990\cdot 1991\cdot 1992}{2}$$

$$Y=1991\cdot\frac{1+1990}{2}\cdot 1990=\frac{1990\cdot 1991\cdot 1991}{2}$$

Por lo tanto, está claro que $X>Y$

14.-

Por la primera condición los números buscados sólo pueden ser 1, 2, 3, 5 y 7. Aplicando la segunda condición, podemos descartar el 2 y el 5. Tampoco podemos tomar dos veces (o más) el 3 ni el 7 (33 y 77 son múltiplos de 11)

Teniendo en cuenta la tercera condición, podemos descartar (1,1,1) y (1,1,7) puesto que la suma de las cifras es 3.

Como 317 es múltiplo de 7, hay que descartar la terna (1,3,7). Por lo tanto, únicamente nos queda la terna (1,1,3) y no es difícil comprobar que cumple las tres condiciones.

15.-

a-d, a, a+d progresión aritmética y $(a-d)^2, a^2, (a+d)^2$ progresión geométrica

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2}{(a-d)^2} = \frac{(a+d)^2}{a^2} \quad \Rightarrow a^4 = \left(a^2 - d^2\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = a^2 - d^2 \\ a^2 = d^2 - a^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ d = \sqrt{2}\,a \\ d = -\sqrt{2}\,a \end{cases}$, con lo que los posibles valores para la razón son: $r_1 = 1,\ r_2 = 3 + 2\sqrt{2},\ r_3 = 3 - 2\sqrt{2}$

16.-

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 2x^2y + 2xy^2 = 21'489 \\ x^2 + y^2 + xy = 7'41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - x^2y - xy^2 = 21'489 \\ (x+y)^2 - xy = 7'41 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - xy(x+y) = 21'489 \\ xy = (x+y)^2 - 7'41 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - (x+y)^3 + 7'41(x+y) = 21'489 \\ xy = (x+y)^2 - 7'41 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 2'9 \\ xy = 2'9^2 - 7'41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 2'9 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 2'9y + 1 = 0 \\ x = \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2'9 \pm 2'1}{2} \\ x = \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

Con lo que las soluciones son: $\begin{cases} x_1 = 0'4; y_1 = 2'5 \\ x_2 = 2'5; y_2 = 0'4 \end{cases}$

17.-

Si no hay ningún múltiplo de tres, todos serán de la forma 3k+1 o 3m+2. Basta coger los tres adecuados y ya está.

Si hay un múltiplo de tres, los otros cuatro serán de la forma anterior. Como en el caso anterior, basta coger los adecuados. Para el resto de los casos, lo mismo.

18.-

$$63! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 60\cdot 61\cdot 62\cdot 63 = 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...59\cdot 61\cdot 63\cdot\left(2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 60\cdot 62\right) =$$

$$= 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...59\cdot 61\cdot 63\cdot 2^{31}\cdot\left(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 30\cdot 31\right) =$$

$$= K\cdot 2^{31}\cdot\left(1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 27\cdot 29\cdot 31\right)\cdot\left(2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 26\cdot 28\cdot 30\right)$$

$$= K\cdot 2^{31}\cdot L\cdot 2^{15}\cdot\left(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 13\cdot 14\cdot 15\right)$$

Repitiendo el proceso se llega a: $63! = Q\cdot 2^{57}$