GEOMETRÍA

01.- Ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,0,-2) y es paralela a la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$$

Sol: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-1}$

02.- Ecuación de la recta que pasa por los puntos P(1,-1,1) y Q(2,1,1)

Sol: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{0}$

03.- Comprobar si los puntos P(1,1,2), Q(-1,3,5) y R(4,-3,8) están alienados.

Sol: No

04.- Ecuación del plano determinado por el punto P(1,3,5) y los vectores $\vec{u}(-1,2,1)$ y $\vec{v}(2,-1,1)$

Sol: $x+y-z=1$

05.- Ecuación del plano que pasa por el punto P(1,3,5) y es paralelo al plano de ecuación:

$$\pi \equiv \begin{cases} x=2+\lambda-\mu \\ y=-1+2\lambda+3\mu \\ z=-\lambda+2\mu \end{cases}$$

Sol: $7x-y+5z-29=0$

06.- Determinar si los puntos P(1,0,-1), Q(2,5,4) y R(2,-1,1) pertenecen al plano calculado en el ejercicio anterior.

Sol: P, no. Q, si. R, no.

07.- Hallar un vector direccional dela recta: $r \equiv \begin{cases} x-2y+z-5=0 \\ 3x+y-3z+9=0 \end{cases}$

Sol: $P(5,6,7)$

08.- Ecuaciones paramétricas de la recta: $r \equiv \begin{cases} x+y-5z+4=0 \\ 3x-y+2z-1=0 \end{cases}$

Sol: $\begin{cases} x=-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\lambda \\ y=-\frac{13}{4}-\frac{13}{4}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

09.- Ecuaciones paramétricas del plano: $\pi \equiv 3x+2y-7z=9$

Sol: $\begin{cases} x=9-2\lambda+7\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$

10.- Determinar **k** para que las rectas *r* y *s* sean paralelas:

$$r \equiv \begin{cases} 4x+5y+2z-3=0 \\ x+3y+4z-5=0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 5x+y+2kz-7=0 \\ 10x+9y+\dfrac{k}{2}z+9=0 \end{cases}$$

Sol: $k=-4$

11.- Ecuación del plano paralelo a $\pi \equiv 2x-5y+3z-4=0$ y que pasa por el punto P(9,-7,5)

Sol: $2x-5y+3z-68=0$

12.- Ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-3y+5z-3=0 \\ 4x+y+5z+10=0 \end{cases}$ y pasa por P(-3,2,-1)

Sol: $14x+7y+15z+43=0$

13.- Ecuación del plano que pasa por P(-1,2,0) y contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ y+3z-5=\ \ 0 \end{cases}$

Sol: $3x-14y-21z+31=0$

14.- Ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$ y pasa por el origen de coordenadas.

Sol: $x-2y+z=0$

15.- Ecuación del plano que pasa por P(8,6,-4) y es paralelo a: $\pi \equiv \begin{cases} x=3-2\lambda+4\mu \\ y=-5-\lambda-\mu \\ z=2\lambda+\mu \end{cases}$

Sol: $x+10y+6z-44=0$

16.- Calcular el punto de intersección de la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+3z-7=0 \\ -2x+y+z+1=0 \end{cases}$ con el plano $\pi \equiv x+3y=0$

Sol: $P\left(\dfrac{15}{13},-\dfrac{5}{13},\dfrac{22}{13}\right)$

17.- Calcular el punto de intersección de las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1-3\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x=-3-2\mu \\ y=-\mu \\ z=3+\mu \end{cases}$$

Sol: $P(1,2,1)$

18.- Calcular el punto de intersección de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ con el plano $\pi \equiv x+3y+2z-1=0$

Sol: $P(11,-6,4)$

19.- Ecuación de la recta que pasa por P(1,0,1) y es paralela a $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$

Sol: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-4}$

20.- Ecuación del plano que contiene a $r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3-3\lambda \\ z = 4+2\lambda \end{cases}$ y pasa por P(1,0,0)

Sol: $9x+y-3z-9=0$

21.- Ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas:

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-8}{4} \qquad \text{y} \qquad s \equiv x = y = z$$

Sol: $x-2y+z=0$

22.- Ecuación de la recta que pasa por P(1,1,2) y se apoya en las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1} \qquad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$

Sol: $\frac{x-1}{9} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$

23.- Dadas las rectas: $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$, $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ y $t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$, calcular la ecuación de la recta que se apoya en *s* y *t* y es paralela a *r*.

Sol: $\frac{x-\frac{5}{2}}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-\frac{7}{2}}{2}$

24.- Ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z \qquad s \equiv x = 2y = z-1$$

Sol: $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$

25.- Ecuación del plano que pasa por P(1,1,1) y es paralelo a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y=0 \\ y-2z+4=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Sol: $x-y-2z+2=0$

26.- Punto de intersección de la recta $r \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ con el plano $\pi \equiv 3x+2y-11z-5=0$

Sol: $P(6,10,3)$

27.- Calcular el ángulo que forman las rectas $r \equiv \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+1}{5}$ y $s \equiv \frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{5}$

Sol: $\frac{\pi}{2}$, son perpendiculares.

28.- Calcular la distancia del punto P(1,3,2) a la recta ***r*** del ejercicio anterior.

Sol: $d=\frac{17\sqrt{2}}{10}$

29.- Ángulo que forma la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{3}$ con el plano $\pi \equiv 2x-3y+5z-3=0$

Sol: $\alpha = arcsen\frac{11\sqrt{19}}{95}$

30.- Distancia del punto P(2,5,1) al plano $\pi \equiv x-2y+2z-3=0$

Sol: $d=3$

31.- Ángulo que forman los planos: $\pi_1 \equiv 2x-y+3z-2=0$ y $\pi_2 \equiv x+y-z-3=0$

Sol: $\alpha = \arccos -\frac{2\sqrt{39}}{39}$

32.- Distancia entre los planos paralelos $\pi_1 \equiv x+y-z-3=0$ y $\pi_2 \equiv x+y-z-8=0$

Sol: $d=\frac{\sqrt{10}}{10}$

33.-Distancia entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=3+3\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=2\mu \\ y=3-\mu \\ z=2+3\mu \end{cases}$ estudiando previamente su posición relativa.

Sol: Son paralelas. $d=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

34.- Análogo al anterior con las rectas: $r\equiv\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$ y $s\equiv\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$

Sol: Se cruzan. $d=\frac{\sqrt{10}}{10}$

35.- Plano perpendicular a la recta $r\equiv\frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{4}$ por el punto P(1,2,1)

Sol: $x+2y+4z-9=0$

36.- Plano que contiene a la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+2}{-1}$ y es perpendicular al plano $\pi\equiv x+3y+5z-7=0$

Sol: $8x-11y+5z+2=0$

37.- Plano perpendicular a los planos $\pi_1\equiv x+2y+3z=4$, $\pi_2\equiv x-2y-2z=0$ y pasa por P(2,3,-5)

Sol: $2x+5y-4z-39=0$

38.- Plano perpendicular a $\pi\equiv x+2y+z=4$, paralelo a $r\equiv x=y-1=z+2$ y contiene a (2,1,-3)

Sol: $x-z-5=0$

39.- Planos que contienen a la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-1}$ y forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el plano $\pi\equiv z=3$

Sol: $4'39x-2y-2'78z-11'95=0$; $3'84x-2y+1'68z-9'2=0$

40.- Planos paralelos a $\pi\equiv 2x-y-2z+3=0$ que disten dos unidades de él.

Sol: $2x-y-2z+9=0$; $2x-y-2z-3=0$

41.- Coordenadas del simétrico de P(7,-2,-3) respecto del plano $\pi\equiv 3x-2y-z=0$

Sol: $P'(-5,6,1)$

42.- Calcular el simétrico de P(2,3,0) respecto de la recta $r\equiv\frac{x-7}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{-1}$

Sol: $P'\left(\frac{38}{3},-\frac{17}{3},-\frac{20}{3}\right)$

43.- Ecuación de la proyección ortogonal de la recta $r\equiv\frac{x-3}{2}=y-4=z-5$ sobre el plano $\pi\equiv 3x+2y-3z+5=0$

Sol: $\dfrac{x-\frac{1}{5}}{203}=\dfrac{y-\frac{13}{5}}{84}=\dfrac{z-\frac{18}{5}}{259}$, o bien: $\begin{cases}5x-9y-2z+31=0\\3x+2y-3z+5=0\end{cases}$

44.- Plano mediatriz del segmento de extremos P(1,-2,3) y Q(-3,4,5)

Sol: $2x-3y-z+9=0$

45.- Recta que pasa por P(2,-1,5) y es paralela a los planos $\pi_1\equiv 2x+3y-4z=6$ y $\pi_2\equiv 3x-y+z=4$

Sol: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{14}=\dfrac{z-5}{11}$

46.- Dadas las rectas $r\equiv\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-5}{3}$ y $s\equiv\begin{cases}3x-3y+2z+3=0\\3x+y-2z+11=0\end{cases}$, se pide:

a) Expresar *s* en forma continua
b) Estudiar la posición relativa de ambas y en el caso de que se crucen:
  b1) mínima distancia entre ambas
  b2) ecuación de la perpendicular común

Sol: a) $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{3}$. b) Se cruzan. b1) $d=\sqrt{10}$. b2) $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-2}{1}$

47.- Ecuación de la recta que pasa P(4,4,1) y corta perpendicularmente a $r\equiv\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{-4}$

Sol: $\dfrac{x-4}{101}=\dfrac{y-4}{-87}=\dfrac{z-1}{-40}$

48.- Ecuación de la recta que pasa por P(2,-1,0) y se apoya en las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}2x-y+3z=4\\x-y+z=2\end{cases}\quad\text{y}\quad s\equiv\frac{x}{3}=y+2=1-z$$

Sol: $\begin{cases}x+2z-2=0\\y+z+1=0\end{cases}$

49.- Punto simétrico de P(1,2,3) respecto de la recta $r\equiv -2x+2=y-2=2z$

Sol: $P'(0,4,-2)$

50.- Ecuación de la recta que pasa por P(3,-2,-4), es paralela al plano $\pi\equiv 3x-2y-3z-7=0$ y se corta con la recta $r\equiv\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$

Sol: $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z+4}{9}$

51.- Ecuación del plano que pasa por los puntos P(1,-1,2), Q(3,1,1) y es perpendicular al plano $\pi\equiv x-2y+3z-5=0$

Sol: $4x-7y-6z+1=0$